Jurnal Al Ulum LPPM Universitas Al Washliyah Medan
Vol. 13 No. 1 Tahun 2025
P-ISSN 2338-5391 | E-ISSN 2655-9862

LINIERISASI ITERATIF PADA METODE BEDA HINGGA UNTUK MEYELESAIKAN MASALAH KONDISI BATAS DIRICHLET PERSAMAN DIFERENSIAL BIASA NON LINIER

Hery Andi Sitompul[1], Enzo W.B.Siahaan[1], Antonius Simamora[1], Togar Timoteus Gultom[2], Arfis A[3], Mulia[4]

[1,2,3]*Universitas* Universitas Darma Agung
[2]Universitas Prima Indonesia
[3] Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara
[4]Universitas Tjut nyak Dhien, Indonesia
Email: herystpl@gmail.com

ABSTRAK

Persamaan diferensial ialah suatu persamaan yang memuat fungsi yang tak diketahui dan satu atau beberapa turunan dari fungsi tersebut, dengan satu atau lebih peubah yang tak diketahui.Permasalahan kondisi batas Dirichlet pada persamaan diferensial biasa non linier pada umumnya harus dikerjakan secara numerik, dengan menerapkan konsep beda hingga yang akan menghasilkan sebuah sistem persamaan non linier. Metode Newton dan Broyden merupakan metode yang sangat populer untuk menyelesaikan sebuah sistem persamaan non linier, tetapi kedua metode ini membutuhkan waktu perhitungan yang sangat lama jika variabel dalam skala besar. Dengan konsep linierisasi secara iteratif pada sistem persamaan non linier yang dihasilkan oleh metode beda hingga pada sebuah persamaan diferensial non linier, akan memberikan pandangan baru terhadap permasahan kondisi batas Dirichlet.

Kata kunci: Linearisasi, ,batas Dirichlet Limits, difrensial

ABSTRACT

Dirichlet boundary condition problems in nonlinear ordinary differential equations generally have to be worked out numerically by applying the concept of finite differences, producing a system of non-linear equations. The Newton and Broyden methods are very popular for solving a system of non-linear equations, but both require very long calculation times if the variables are on a large scale. The concept of iterative linearization of a system of non-linear equations produced by the finite difference method in a nonlinear differential equation, it will provide new insight into the problem of Dirichlet boundary conditions.

*Keywords**:** linearization, Dirichlet limits, differential equations*

P-ISSN 2338-5391 | E-ISSN 2655-9862

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Persamaan diferensial ialah suatu persamaan yang memuat fungsi yang tak diketahui dan satu atau beberapa turunan dari fungsi tersebut, dengan satu atau lebih peubah yang tak diketahui (Maya, 2014). Persamaan diferensial dapat diklasifkasikan menjadi 2 macam, yaitu Persamaan diferensial biasa (ordinary di§erential equation), disingkat PDB, Persamaan diferensial parsial (parsial di§erential equation), disingkat PDP (Gorontalo, 2018).

Persamaan diferensial parsial dibagi menjadi tiga jenis yaitu persamaan diferensial eliptik, parabolik dan hiperbolik (Metode et al., 2023). Sistem persamaan diferensial merupakan suatu sistem yang terdiri dari dua atau lebih persamaan diferensial (Ii, 2006).

Terdapat tiga tipe masalah nilai batas pada persaman diferensial biasa yaitu : kondisi batas Dirichlet, kondisi batas Neumann dan kondisi batas Robin. Pada masalah kondisi batas Dirichlet informasi data yang ada hanya ada pada ujung interval domain sehingga pada umumnya untuk menyelesaikannya secara analitik bukanlah pekerjaan yang mudah. Sebagian besar masalah kondisi batas Dirichlet harus dikerjakan secara numerik. Jika bentuk persamaan diferensial adalah linier maka pengerjaan secara numerik dapat dilakukan dengan sistem persamaan linier dengan mengaplikasin metode beda hingga. Persamaan diferensial parsial membahas tentang solusi analitik dan solusi numerik. Solusi analitik pada persamaan diferensial parsial diperoleh dengan menggunakan perhitungan secara sistematis, dan solusi yang diperoleh berupa nilai eksak (Metode *et al.*, 2023).

Konsep yang sama jika metode beda hingga diaplikasikann pada persamaan diferensial non linier akan mengghasilkan sistem persamaan non liinier, pada umumnya untuk meyelesaikan sistem persamaan non linier dilakukan dengan metode Newton dan Broyden tetapi keduannya menggunakan matrik Jacobian dan inversnya pada setiap iterasinya. Jika ukuran matriknya besar akan sangat memberikan kesulitan untuk mengerjakannya pada setiap iterasi dan sangat membutuhkan waktu dalam melakukan perhitungan. Hal ini membuat para ilmuwan untuk terus mengembangkan metode numerik baru untuk menyelesaikan sistem persamaan non linier. Metode linierisasi secara iteratif adalah salah satunya.

Dengan berkembangnya teknologi komputer zaman sekarang maka perhitungan secara numerik yang kelihatannya sangat rumit sekarang menjadi hal yang sangat mungkin. penelitian dilakukan dengan mengenalkan bentuk umum PDP Gelombang Homogen dengan syarat batas Dirichlet dan Neumann (Syarat *et al.*, 2016).

Tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Mengaplikasikan Metode Linierisasi secara iteratif pada sistem persamaan non linier yang dihasilkan oleh metode beda hingga pada sebuah persamaan diferensial biasa dengan kondisi batas Dirichlet.
2. Mendapatkan solusi numerik dari sebuah persamaan diferensial biasa non linier dengan kondisi batas Dirichlet.
3. Melakukan perbandingan hasil numerik dengan solusi eksak/analitik untuk memperlihatkan bahwa metode ini berhasil atau tidak..

Tinjauan Pustaka

Persamaan Diferensail Biasa

Bentuk umum persamaan diferensial biasa orde dua :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (1)$$

Dengan domain : $a \le x \le b$ dengan masalah nilai batas yang diberikan pada ujung interval domain yaitu $y(a)$ dan $y(b)$. Jika nilai kondisi pada batas adalah nilai tetap disebut dengan kondisi batas Diriclet misalnya $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$. Sedangkan kondis batas dengan syarat disebut dengan kondisi Neumann dan Robin. Misalnya $y(a) = \alpha, y'(b) = \beta$ disebut dengan kondisi Neumann dan $y(a) = \alpha, y(b) + cy'(b) = \beta$ disebut dengan kondisi Robin.

Persamaan diferensial non linear adalah persamaan diferensial biasa yang tak linear (Ii & Teori, 2010). Suatu persamaan diferensial biasa disebut non linier jika memuat turunan dari variabel tak bebas berderajat lebih dari

P-ISSN 2338-5391 | E-ISSN 2655-9862

satu dan terdapat perkalian dari varaibel tak bebas dan atau turunannya.
Contoh :

$$y'' + 5y' - 6y = 2 \quad \ldots\ldots(2)$$

Disebut dengan persamaan diferensial linier karena tidak memuat perkalian variabel tak bebas dengan atau turunannya.

$$y'' + (1+y)y' - (1+y)y = x \quad \ldots\ldots(3)$$

disebut dengan persamaan diferensial biasa non linier karena memuat perkalian variabel tak bebas dengan atau turunannya.

Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah metode numerik yang umum digunakan untuk menyelesaikan persoalan teknis dan problem matematis dari suatu gejala fisis (Yulianto & Amalia, 2016) . Untuk mendapat hasil simulasi, persamaan-persamaan matematis yang menentukan model struktur (governing equations) perlu diselesaikan (*No Title*, n.d.). Pada metode beda hingga nilai dari y' dan y'' dinyatakan dengan selisih antara nilai y yang berdekatan/berdampingan sebagai contoh :

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} \quad \ldots\ldots(4)$$

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} \quad \ldots\ldots(5)$$

Dimana h adalah jarak antara 2 titik yang berdekatan pada daerah asal yang sudah dibagi menjadi n interval baru atau disebut dengan grid sedemikian hingga $h = \frac{b-a}{n}$.

Metode Linierisasi Iteratif

Metode literasi adalah metode yang memisahkan x dengan sebagian x yang lain sehingga diperoleh : x=g(x) (Zainudin & St, 2014). tiga langkah yang memuat dua turunan untuk menemukan persamaan nonlinear berakar ganda dengan multiplisitas yang tidak diketahui (Ganda, n.d.).

Dalam hal ini disebut konvergen dengan pendekatan ekspansi deret Taylor dan Mclaurin. Umumnya Sistem persamaan ini mempunyai 2 sifat utama (Awang, 2023). Contohnya I merupakan sebuah persamaan linear maka pengurangan dan penambahan bilangan pada kedua ruas persamaan tidak akan mengubah solusi persamaan.

Misalkan sebuah sistem persamaan non linier :

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(6)$$

Dimana untuk setiap $f_i(x_j)$ untuk $i = 1, \cdots m$ dan $j = 1, \cdots, n$ adalah fungsi ril non linier.

Dengan linierisasi menggunakan ekspansi deret Taylor pada sebuah titik $A(a_1, \cdots, a_n)$ pada setiap persamaan pada (6):

$$\left.\begin{aligned} f_1(A) + \textstyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1(A)}{x_j}(x_j - a_j) &= 0 \\ f_2(A) + \textstyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_2(A)}{x_j}(x_j - a_j) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(A) + \textstyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_m(A)}{x_j}(x_j - a_j) &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots(7)$$

Persamaan (7) adalah sebuah sistem persamaan linier dengan solusi misalkan $\hat{x}_j$. Kemudian diperkenalkan sebuah variabel baru :

$$\bar{x}_j = \hat{x}_j + u_j - v_j \quad \ldots\ldots(8)$$

Dimana : $0 \le u_j \le 1, 0 \le v_j \le 1$

Selanjutnya persamaan (8) substitsi kembali kepersamaan (6) dan lakukan kembali proses linierisasi dengan ekspansi deret Mclaurin sehingga akan diperoleh persamaan baru :

$$\left.\begin{aligned} f_1(u_1, u_2, \cdots, u_n, v_1, v_2, \cdots, v_n) &= 0 \\ f_2(u_1, u_2, \cdots, u_n, v_1, v_2, \cdots, v_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(u_1, u_2, \cdots, u_n, v_1, v_2, \cdots, v_n) &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots(9)$$

Persamaan (9) selanjutnya diselesaikan dengan pemograman linier dengan fungsi tujuan:

$$min \sum_{j=1}^{n} u_j + v_j$$

Misalkan solusi dari pemograman linier (9) adalah (u_j, v_j) selanjutnya subsitusi nilai ini ke persamaan (8), dan kembali perkenalkan variabel baru seperti persamaan (8) substitusi kembali ke persamaan (6) untuk melakukan proses liniersiasi dengan ekspansi deret Mclaurin dan akan menghasilkan pemograman linier baru seperti (9). Hal ini dilakukan secara iteratif sampai semua nilai u_j dan atau v_j adalah nol atau lebih kecil dari nilai toleransi, maka solusi dari persamaan (6) adalah $\hat{x}_j$ terakhir.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian kuantitatif (Tahun, 2023). Pengajuan ide dalam kajian ini akan dimulai dengan mengubah sebuah persamaan diferensial biasa non linier menjadi sebuah sistem persamaan non linier dengan mengaplikasin metode beda hingga. Penelitian yang dilakukan bermaksud untuk menyelesaikan masalah yang ada, kemudian hasilnya digunakan sebagai acuan, pembanding serta sebagai tolak ukur (Lutfina *et al*., 2022).

Misalkan sebuah persamaan diferensial :

$$y'' = f(x, y, y') \text{.......................................(10)}$$

Dengan kondisi batas $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$ untuk $a \le x \le b$. Interval akan dibagi menjadi n sub interval dengan $h = \frac{b-a}{n}$ dengan demikian akan terdapat $n + 1$ titik atau grid dimana nilai solusi numerik $y_0, y_1, \cdots. y_n$ akan ditentukan. Dengan menggunakan persamaan (4) dan (5) pada (10) maka akan diperoleh bentuk :

$$\frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} = f\left(x, y, \frac{y(x+h) - (x-h)}{2h}\right) \text{...............................(11)}$$

dengan menggunakan persamaan (11) pada setiap grid maka akan diperoleh sebanyak $n - 1$ persamaan non linier :

$$\left.\begin{array}{c} y_0 = \alpha \\ \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} - f\left(x_1, y_1, \frac{y_2 - y_0)}{2h}\right) = 0 \\ \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} - f\left(x_2, y_2, \frac{y_3 - y_1)}{2h}\right) = 0 \\ \vdots \\ \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{h^2} - f\left(x_{n-1}, y_{n-2}, \frac{y_n - y_{n-})}{2h}\right) = 0 \\ y_n = \beta \end{array}\right\}$$
....(12)

Selanjutnya solusi dari sistem persamaan non linier (12) yaitu $y_1, y_2 \cdots . y_{n-1}$ akan dilakukan dengan metode linierisasi iteratif dengan langkah – langkah sebagai berikut :

1. Ambil sistem persamaan non linier (12)
2. Tentukan sembarang nilai awal untuk $A = (y_1^0, y_2^0, \cdots, y_{n-1}^0)$ non negatif.
3. Linierisasi setiap persamaan pada (12) dengan menggunakan eksapansi deret Taylor pada A.
4. Tentukan solusi dari sistem persamaan linier pada langkah 3 misalkan $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \cdots, \hat{y}_{n-1})$.
5. Misalkan variabel baru : $\bar{y}_j = \hat{y}_j + u_j - v_j$ untuk $j = 1, \cdots, n - 1$.
6. Substitusi variabel baru pada langkah 5 tersebut ke sistem persamaan pada langkah 1
7. Linierisasi persamaan baru yang diperoleh pada langkah 6 dengan ekspansi deret Mclaurin.
8. Selesaikan masalah pemograman linier : $\sum_{j=1}^{n-1} u_j + v_j$ dengan kendala sistem persamaan linier yang diperoleh pada langkah 7. Periksa apakah seluruh nilai u_j dan v_j sudah nol atau <*toleransi*. Atau $\|Y^{k+1} - Y^k\| \le toleransi$, dimana $Y = (y_1, y_2 \cdots . y_{n-1})$ jika iya maka solusi adalah Y^{k+1} ,jika tidak lanjut ke langkah 9.
9. Substitusi solusi yang diperoleh pada langkah 8 ke persamaan pada langkah 5 dengan $\bar{y}_j = \hat{y}_j + u_j - v_j$ yang baru dan ulangi langkah 5,6,7,8 sampai kondisi pada langkah delapan atau kriteria pemberhentian terpenuhi.

Setelah perhitungan secara numerik selesai dilakukan, maka hasil yang diperoleh akan dibandingkan dengan solusi eksak untuk melihat kebaikan/performa dari metode yang diajukan diatas. Nilai performa akan diukur dari rarta – rata persentase *error*/galat yang dihasilkan. Jika rata – rata persentase galat dibawah 7% dapat disimpulkan bahwa hasilnya sangat baik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Diketahui banyak fenomena dalam bidang ilmu pengetahuan yang dapat dijelaskan dengan persamaan diferensial parsial (Batiha, 2014).

Untuk mengaplikasikan metode linierisasi iteratif pada persamaan diferensial biasa akan dilakukan dengan ekperimen pada 3 contoh kasus yang akan diberikan berikut.

Matlab (Matrix Laboratory) adalah software/prangkat lunak yang dikembangkan oleh Mathworks, Inc dengan memanfaatkan matriks dalam penggunaannya (Fisika, 2019).

Semua perhitungan pada kasus ini dilakukan dengan bantuan Matlab.

Contoh 1. Tentukan solusi numerik dari persamaan diferensial : $y'' = y^3 - yy'$ dengan kondisi batas Dirichlet :$y(1) = 1/2, y(2) = 1/3$ untuk $1 \leq x \leq 2$ dengan $h = 0.1$. Dimana solusi eksak/analitik adalah :$y(x) = \frac{1}{x+1}$

Dengan menggunakan metode beda hingga dari persamaan (4) dan (5) ke persamaan diferensial contoh 1 maka diperoleh :

$$y_0 = 1/2$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} - y_1^3 + y_1\left(\frac{y_2 - y_0}{2h}\right) &= 0\\
\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} - y_2^3 + y_2\left(\frac{y_3 - y_1}{2h}\right) &= 0\\
\frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{h^2} - y_4^3 + y_3\left(\frac{y_4 - y_2}{2h}\right) &= 0\\
\frac{y_5 - 2y_4 + y_3}{h^2} - y_5^3 + y_4\left(\frac{y_5 - y_3}{2h}\right) &= 0\\
\frac{y_6 - 2y_5 + y_4}{h^2} - y_5^3 + y_5\left(\frac{y_6 - y_4}{2h}\right) &= 0\\
\frac{y_7 - 2y_6 + y_5}{h^2} - y_6^3 + y_6\left(\frac{y_7 - y_5}{2h}\right) &= 0\\
\frac{y_8 - 2y_7 + y_6}{h^2} - y_7^3 + y_7\left(\frac{y_8 - y_6}{2h}\right) &= 0\\
\frac{y_9 - 2y_8 + y_7}{h^2} - y_8^3 + y_8\left(\frac{y_9 - y_7}{2h}\right) &= 0\\
\frac{y_{10} - 2y_9 + y_8}{h^2} - y_9^3 + y_9\left(\frac{y_{10} - y_8}{2h}\right) &= 0
\end{aligned}\right\}$$

Dalam (13) terdapat 9 persamaan non linier yang akan ditentukan solusinya dengan metode linierisasi iteratif. Nilai awal akan ditentukan dengan formulasi : $y_i^0 = y_0 + \frac{y_{10} - y_0}{2-1}(x_i - 1),\ i = 1,2,\dots,9.$

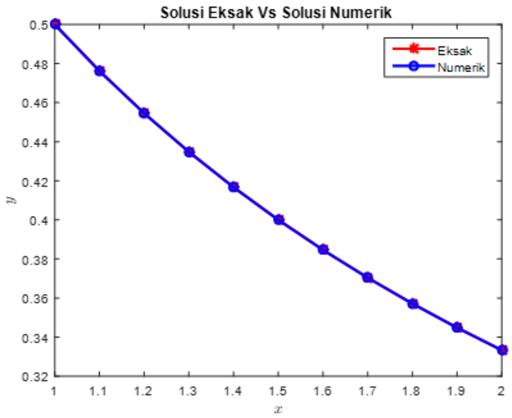
x_i	y_i^0
1.1	0.483333
1.2	0.466666
1.3	0.450000
1.4	0.433333
1.5	0.416666
1.6	0.400000
1.7	0.383333
1.8	0.366666
1.9	0.350000

P-ISSN 2338-5391 | E-ISSN 2655-9862

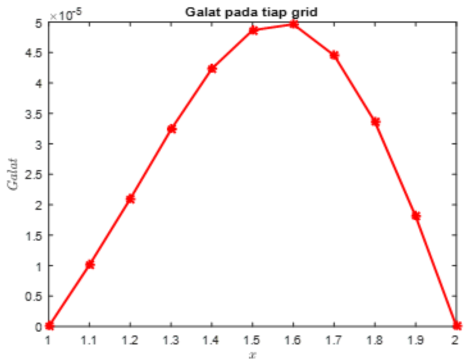
Tabel 1. Nilai Awal Metode Linierisasi Iteratif

x_i	Eksak $y(x_i)$	Numerik $y(x_i)$	$\lvert\varepsilon_i\rvert$
1.0	0.500000	0.500000	0
1.1	0.476190	0.476200	1.01207e-05
1.2	0.454545	0.454566	2.09615e-05
1.3	0.434782	0.434814	3.23653e-05
1.4	0.416666	0.416709	4.23493e-05
1.5	0.400000	0.400048	4.86740e-05
1.6	0.384615	0.384665	4.96611e-05
1.7	0.370370	0.370414	4.45559e-05
1.8	0.357142	0.357176	3.36216e-05
1.9	0.344827	0.344845	1.80836e-05
2.0	0.33333	0.333333	0

Dari hasil perhitungan dengan bantuan matlab diperoleh bahwa iterasi berhenti pada iterasi ke-1 dengan seluruh u_j dan v_j adalah nol, maka solusi $Y^1 = y_1^1, y_2^1, \cdots, y_9^1$ seperti yang disajikan dalam tabel berikut :
Hasil perhitungan metode linierisasi iteratif:



Gambar 1. Perbandingan Solusi Eksak Dan Solusi Numerik Contoh 1



Gambar 2. Galat Pada Solusi Numerik Contoh 1

Contoh 2. Tentukan solusi numerik dari persamaan diferensial : $yy'' - \frac{1}{2}(y')^2$ untuk $0 \le x \le 1$ dan kondisi batas Dirichlet $y(0) = 0,\ y(1) = 1$ dengan $h = 0.1$. Dimana solusi analitik dari persamaan diferensial tersebut adalah : $y(x) = x^2$.

Dengan menggunakan metode beda hingga dari persamaan (4) dan (5) ke persamaan diferensial tersebut maka akan diperoleh :

$$y_0 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} y_1\left(\frac{y_2-2y_1+y_0}{h^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y_2-y_0)}{2h}\right)^2 &= 0 \\ y_2\left(\frac{y_3-2y_2+y_1}{h^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y_3-y_1)}{2h}\right)^2 &= 0 \\ &\vdots \\ y_9\left(\frac{y_{10}-2y_9+y_8}{h^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y_{10}-y_8)}{2h}\right)^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots(14)$$

Akan terdapat 9 persamaan nonlinier pada persamaan (14). Dengan nilai awal proses linierisasi iteratif adalah :

Tabel 2. Nilai Awal Metode Linierisasi Iteratif

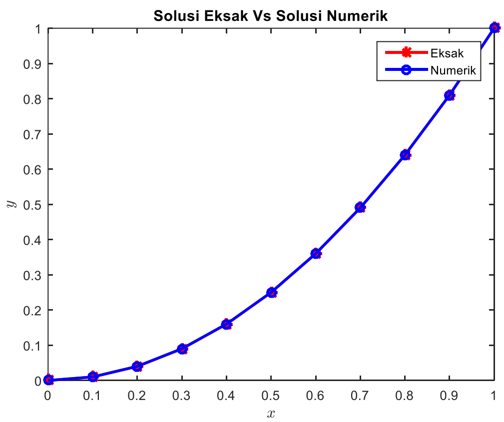
x_i	y_i^0
0.1	0.1
0.2	0.2
0.3	0.3
0.4	0.4
0.5	0.5
0.6	0.6
0.7	0.7
0.8	0.8
0.9	0.9

Dari matlab diperoleh bahwa proses linierisasi iteratif berhenti pada itersai ke-10 dengan seluruh u_j dan v_j lebih kecil dari nilai toleransi 10^{-5} dengan hasil seperti tertera pada Tabel 2.

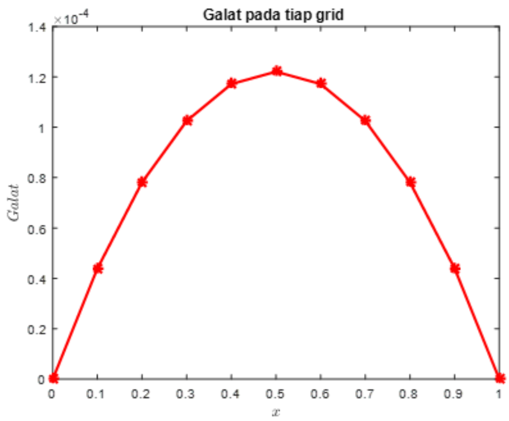
Jurnal Al Ulum LPPM Universitas Al Washliyah Medan
Vol. 13 No. 1 Tahun 2025
P-ISSN 2338-5391 | E-ISSN 2655-9862

Tabel 3. Perbandingan Solusi Eksak Dan Solusi Numerik Contoh 2

x_i	Eksak $y(x_i)$	Numerik $y(x_i)$	$\lvert\varepsilon\rvert_i$
.0	0	0	0
0.1	0.01	0.010043	4.39453e-05
0.2	0.04	0.040078	7.81249e-05
0.3	0.09	0.090102	0.00010253
0.4	0.16	0.160117	0.00011718
0.5	0.25	0.250122	0.00012207
0.6	0.36	0.360117	0.00011718
0.7	0.49	0.490102	0.00010253
0.8	0.64	0.640078	7.81250e-05
0.9	0.81	0.810043	4.39453e-05
1.0	1.0	1.0	0



Gambar 3. Perbandingan Solusi Eksak Dan Solusi Numerik Contoh 2



Gambar 4. Galat Pada Solusi Numerik Contoh 2.

Contoh 3. Tentukan solusi numerik dari persamaan diferensial : $(y'')^2 = y^2, 0 \le x \le 2$, dengan kondisi batas Dirichlet :$y(0) = 1, y'(0) = 1, y(2) = 7.3891$, dengan $h = 0.2$. Dimana solusi eksak/analitik adalah :$y(x) = e^x$

Persamaan non linier pada setiap grid adalah:

$$y_0 = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2}\right)^2 - (y_1)^2 &= 0 \\ \left(\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2}\right)^2 - (y_2)^2 &= 0 \\ &\vdots \\ \left(\frac{y_{10} - 2y_9 + y_8}{h^2}\right)^2 - (y_9)^2 &= 0 = 0 \end{aligned}\right\} \text{..............(15)}$$

$$y_{10} = 7.3891$$

Dengan menggunakan tebakan nilai awal proses iterasi : $y_i^0 = y_0 + \frac{y_{10} - y_0}{2 - 0}(x_i - 1), \ i = 1,2,\ldots,9$.

Tabel 4. Nilai awal metode linierisasi iteratif

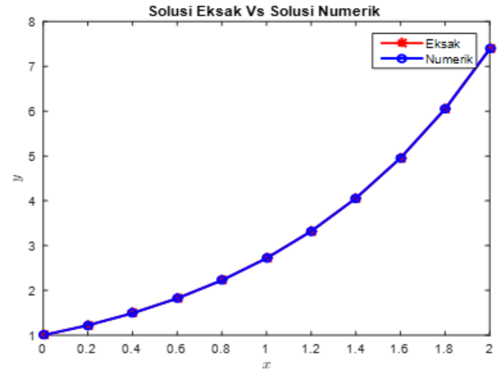
x_i	y_i^0
0.2	1.63891
0.4	2.27782
0.6	2.91673
0.8	3.55564
1.0	4.19455
1.2	4.83346
1.4	5.47237
1.6	6.11128
1.8	6.75019

Hasil perhitungan dengan menggunakan matlab diperoleh pada iterasi ke-8 seluruh u_j dan v_j lebih kecil dari nilai toleransi 10^{-5} dengan hasil sebagai berikut:

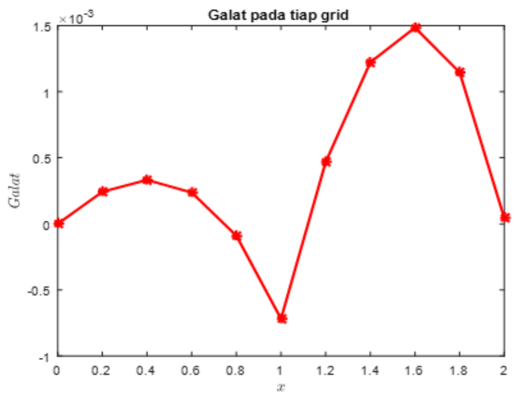
Jurnal Al Ulum LPPM Universitas Al Washliyah Medan
Vol. 13 No. 1 Tahun 2025
P-ISSN 2338-5391 | E-ISSN 2655-9862

Tabel 5. Perbandingan Solusi Eksak Dan Solusi Numerik Contoh 3.

x_i	Eksak $y(x_i)$	Numerik $y(x_i)$	$\lvert\varepsilon_i\rvert$
0	1	1	0
0.2	1.221403	0.1000	0.000242
0.4	1.491825	0.1990	0.000332
0.6	1.822119	0.2965	0.000236
0.8	2.225541	0.3921	8.9427e-5
1.0	2.718282	0.4853	0.000718
1.2	3.320117	0.5757	0.000467
1.4	4.055200	0.6631	0.001222
1.6	4.953032	0.7471	0.001484
1.8	6.049647	0.8275	0.001145
2	7.3891	7.3891	0



Gambar 5. Perbandingan Solusi Eksak Dan Solusi Numerik Contoh 3



Gambar 6. Galat Pada Solusi Numerik Contoh 3.

Berdasarkan hasil perhitungan yang disajikan dalam bentuk tabel dan gambar pada ketiga contoh diatas, dapat dilihat bahwa grafik dari solusi numerik dan solusi eksak/analitik saling menimpa satu sama lain sehingga seolah – olah grafik dari solusi analitik tidak terlihat. Hal ini dikarenakan solusi numerik nyaris sama dengan solusi analitik berdasarkan analisa data berikut.

Pada contoh 1 galat terbesar adalah 4.96611e-05 atau 0.0129% dan rata – rata galat mutlak yang dihasilkan adalah 2.7308e-05 atau 0.0027%, pada contoh 2 galat terbesar adalah 0.00012207 atau 0.0488% dan rata – rata galat mutlak yang dihasilkan adalah 7.3239e-05 atau 0.0209%, sedangkan pada contoh 3 galat terbesar adalah 0.001484 0.0300% dan rata – rata galat mutlak yang dihasilkan adalah 6.5949e-04atau 0.0200%. Dapat dilihat bahwa pada ketiga contoh yang diberikan kesalahan mutlak yang dihasilkan oleh metode linierisasi iteratif sangat kecil sehingga dapat dikatakan metode ini sangat akurat.

KESIMPULAN

Berdasarkan 3 contoh yang sudah dikerjakan pada hasil dan pembahasan diatas dapat diambil kesimpulan :

1. Konsep linierisasi secara iteratif dapat diaplikasin dengan baik pada persamaan diferensial biasa non linier.
2. Solusi numerik dengan metode linierisasi iteratif yang diperoleh sangat baik.
3. Rata – rata galat mutlak yang dihasilkan oleh metode linierisai iteratif pada 3 contoh yang diberikan sangatlah kecil yaitu : 0.0027%, 0.0209% dan 0.0200%.

DAFTAR PUSTAKA

Awang, R. (2023). *Perbedaan Persamaan Linear Dan Non Linear Perbedaan Persamaan Linear Dan Non Linear*. *February*.

Batiha, B. M. (2014). *Application Of Variational Iteration Method To Linear Partial Differential Application Of Variational Iteration Method It Is Well Known That Many Phenomena In Scientific Fields Can Be Described*. *May*.

Fisika, P. S. (2019). *Aplikasi Matlab Pada Teknologi Pencitraan Medis*. *1*(1), 28–34.

Ganda, N. B. (N.D.). *Metode Iterasi Tiga Langkah Dengan Orde Konvergensi*

Lima Untuk Menyelesaikan Persamaan Nonlinear Berakar Ganda Zuhnia Lega 1 ∗ , Agusni 2 , Supriadi Putra 2. *1*(2), 91–101.

Gorontalo, U. N. (2018). *Persamaan diferensial biasa. September*.

Ii, B. A. B. (2006). *Bab ii landasan teori 2.1*. 1–10.

Ii, B. A. B., & Teori, L. (2010). *dan pemodelan matematika. A. Persamaan Diferensial Definisi 2.1 (Ross, 2010: 3)*. *2*, 8–35.

Lutfina, E., Inayati, N., & Saraswati, G. W. (2022). *Analisis Perbandingan Kinerja Metode Rekursif dan Metode Iteratif dalam Algoritma Linear Search A Comparative Analysis of the Performance of Recursive Methods and Iterative Methods in Linear Search Algorithms*. *11*(28). https://doi.org/10.34010/komputika.v11i2.5493

Maya, R. (2014). *Persamaan Diferensial Biasa*.

Metode, M., Variabel, P., Matematika, J., Statistika, K., Nomor, V., Agustus, M., Nomor, V., & Agustus, M. (2023). *, Herdi Budiman 2) , Wayan Somayasa 3) dan La Pimpi 4) ,*. *3*, 330–336.

No Title. (n.d.).

Syarat, D., Dirichlet, B., Neumann, D., & Utomo, R. B. (2016). *Persamaan Differensial Parsial Gelombang Homogen Pada Selang*. *2*(2), 56–66.

Tahun, V. N. (2023). *Jurnal Al Ulum LPPM Universitas Al Washliyah Medan Jurnal Al Ulum LPPM Universitas Al Washliyah Medan*. *11*(2).

Yulianto, T., & Amalia, R. (2016). *Penerapan Metode Beda Hingga pada Model Matematika Aliran Banjir dari Persamaan Saint Venant*. *2*(1).

Zainudin, A., & St, S. (2014). *Penyelesaian Persamaan Non Linear Metode Iterasi Konsep Metode Iterasi*.